

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

### 1-дәріс. Тізбек. Тізбектің шегі.

**Дәрістің мақсаты** – тізбектің анықтамасын, оның жинақтылығын, Коши критерийін білу

**Негізгі сұрақтар:**

1. Тізбектің анықтамасы және жинақтылығы
2. Коши критерийі. Іргелі тізбек

## 1 Сан тізбегі және оның шегі

**Анықтама 1.1.1.** Егер натурал сандар жиынының  $N = \{n\}$  әрбір  $n$  мәніне белгілі бір ереже бойынша  $x_n$  нақты саны сәйкестендірілсе, онда нөмірленген нақты сандар жиынын

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1.1.1)$$

сан тізбегі немесе жай тізбек деп атайды.

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  сандарын тізбектің мүшелері немесе элементтері деп, ал  $x_n$  тізбектің  $n$  мүшесі немесе жалпы мүшесі деп аталады. Тізбекті  $\{x_n\}$  немесе  $x_n, n \in \mathbb{N}$  арқылы белгілейді.

Кейде (1.1.1) тізбекті айнымалы  $x_n$  мәндер жиыны деп қарастырады. Сондықтан да  $x_n$  айнымалысы берілсе, онда (1.1.1) тізбегінің де берілгені. Осыған байланысты тізбекті кейде айнымалы шама деп атайды.

**Мысалдар.**

1)  $x_n = \frac{1}{n}$  тізбегі мына сандардан құрастырылады:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

2) Егер  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$  болса, тізбек мүшелері мына сандар:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

3)  $x_n = (-1)^n$  тізбегі мына сандардан тұрады:

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

4)  $x_n = 1$  тізбегінің мүшелері:

$$1, 1, 1, 1, \dots$$

Бұдан тізбек мүшелері әртүрлі, екі саннан, тіпті бір саннан құралатынын көреміз. Барлық элементтері тек бір ғана саннан тұратын тізбекті тұрақты тізбек деп атайды.

$\{x_n\}$  мен  $\{y_n\}$  тізбектері берілсін.

**Анықтама 1.1.2.**  $\{x_n\}$  мен  $\{y_n\}$  тізбектердің қосындысы, айырмасы және көбейтіндісі деп сәйкесінше  $\{x_n + y_n\}$ ,  $\{x_n - y_n\}$ ,  $\{x_n \cdot y_n\}$  тізбектерін айтады.

Егер  $y_n \neq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$  болса, онда  $\{x_n\}$  тізбегін  $\{y_n\}$  тізбегіне бөлгендегі қатынасы деп  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  тізбегін айтады.

**Ескерту.** Егер  $\{y_n\}$  тізбегінде саны шекті элементтер нөлге тең болса, онда  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  қатынасын  $y_n \neq 0$  болатын нөмірден бастап анықтау керек.

**Анықтама 1.1.3.** Егер кез келген  $n \in \mathbb{N}$  үшін  $x_n < x_{n+1}$  (немесе  $x_n > x_{n+1}$ ) болса, онда  $\{x_n\}$  тізбегін өсетін (кемуші) деп атайды.

**Анықтама 1.1.4.** Егер кез келген  $n \in \mathbb{N}$  үшін  $M \in \mathbb{R}$  саны табылып,  $x_n \leq M$  ( $x_n \geq m$ ) теңсіздігі орындалса, онда  $\{x_n\}$  тізбегін жоғарғы (төменгі) жағынан шектелген деп атайды.

**Анықтама 1.1.5.** Жоғарғы және төменгі жағынан шектелген тізбекті шектелген тізбек дейді, оны  $|x_n| \leq K$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  түрінде жазады.

Соңғы анықтамаға эквивалентті анықтама беруге болады.

**Анықтама 1.1.6.** Егер  $\{x_n\}$  тізбегі жоғары және төменгі жағынан шектелсе, онда оны шектелген дейді, яғни

$$m \leq x_n \leq M. \quad (1.1.2)$$

Эквиваленттілікті дәлелдеу үшін  $m = -K$ ,  $M = K$  деп алу жеткілікті. Керісінше, егер  $m \leq x \leq M$  теңсіздігі орындалса, онда  $K = \max\{|m|, |M|\}$  деп алсақ,  $|x| \leq K$  теңсіздігі шығады.

**Анықтама 1.1.7.** Егер кез келген  $A > 0$  саны үшін  $\{x_n\}$  тізбегінің ең болмаса бір элементі табылып,  $|x_n| > A$  теңсіздігі орындалса, онда бұл тізбекті шектелмеген деп атайды.

Егер  $\{x_n\}$  тізбегі тек жоғары немесе төменгі жағынан ғана шектелсе, онда оның шектелмейтіндігі соңғы анықтамадан шығады.

Тізбектер кейде рекуррентті түрде беріледі. Осы жағдайда тізбектің  $n$  мүшесі оның алдыңғы мүшелері арқылы өрнектеледі. Мысалы,  $x_n = x_{n-1} + d$ ,  $b_n = b_{n-1}q$ ,  $n = 2, 3, \dots$  теңдіктері бойынша сәйкесінше арифметикалық және геометриялық прогрессияларды құруға болады.

Енді тізбек шегі түсінігіне тоқталайық.

**Анықтама 1.1.8.** Егер кез келген  $\varepsilon > 0$  санына сәйкес  $N = N(\varepsilon)$  натурал саны табылып, барлық  $n \geq N$  мәндерінде

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (1.1.3)$$

теңсіздігі орындалса, онда  $a$  санын  $\{x_n\}$  тізбегінің шегі деп атайды да, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (1.1.4)$$

немесе  $n \rightarrow \infty$ ,  $x_n \rightarrow a$  деп жазады.

**Кванторлар тілінде жазылуы:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N(\varepsilon)) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

**Анықтама 1.1.9.** Егер кез келген  $\varepsilon > 0$  санына сәйкес  $N = N(\varepsilon)$  натурал саны табылып, барлық  $n > N$  мәндерінде

$$|x_n| > \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда  $\{x_n\}$  тізбегі  $\infty$ -ге (шексіздікке) ұмтылады (немесе шексіз үлкен) деп атайды да, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

немесе

$$n \rightarrow \infty, \quad x_n \rightarrow \infty.$$

**Кванторлар тілінде:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N(\varepsilon)) : |x_n| > \varepsilon.$$

**Анықтама 1.1.10.**  $\varepsilon > 0$  саны табылып, әрбір натурал  $n$  санына сәйкес  $N = N(n)$  натурал саны табылып, барлық  $N(n) > n$  мәндерінде

$$|x_{N(n)} - a| \geq \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда  $a$  санын  $\{x_n\}$  тізбегінің шегі емес деп атайды да, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a$$

немесе

$$n \rightarrow \infty, \quad x_n \not\rightarrow a.$$

**Кванторлық түрде:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists N(n) > n) : |x_{N(n)} - a| \geq \varepsilon.$$

Егер кез келген  $a$  нақты саны үшін  $\{x_n\}$  тізбегі  $a$  санына ұмтылмаса, онда оның нақты мәнді шегі жоқ (шегі жоқ) дейді.

**Анықтама 1.1.11.** Егер  $\{x_n\}$  тізбегінің ақырлы шегі  $a$  бар болса, онда оны  $a$  санына жинақты дейді. Егер бұл тізбектің шегі жоқ немесе  $\infty$  болса, онда оны жинақсыз дейді.

**Анықтама 1.1.12.** Егер кез келген  $\varepsilon > 0$  санына сәйкес  $N = N(\varepsilon)$  натурал саны табылып, барлық  $n \geq N$  мәндерінде

$$a - \varepsilon < x_n \leq a$$

теңсіздігі орындалса, онда  $\{x_n\}$  тізбегі  $a$  санына сол жақтан (төменнен) ұмтылады деп атайды, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - 0$$

немесе

$$n \rightarrow \infty, \quad x_n \uparrow a.$$

**Кванторлар тілінде жазылуы:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N(\varepsilon)) : a - \varepsilon < x_n \leq a.$$

**Анықтама 1.1.13.** Егер кез келген  $\varepsilon > 0$  санына сәйкес  $N = N(\varepsilon)$  натурал саны табылып, барлық  $n \geq N$  мәндерінде

$$a \leq x_n < a + \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда  $\{x_n\}$  тізбегі  $a$  санына оң жағынан (жоғарыдан) ұмтылады деп атайды да, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + 0$$

немесе

$$n \rightarrow \infty, \quad x_n \rightarrow a + 0.$$

**Кванторлар тілінде:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N(\varepsilon)) : a \leq x_n < a + \varepsilon.$$

Егер  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  болса және барлық  $n = 1, 2, \dots$  үшін  $x_n \leq a$  (немесе  $x_n \geq a$ ) теңсіздігі орындалса, онда  $\{x_n\}$  тізбегін  $a$  санына сол (оң) жағынан жинақты дейді де, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - 0 \quad \text{немесе} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + 0.$$

Егер  $a = 0$  болса, онда  $0 - 0$  және  $0 + 0$  деп жазуға болады.

**Тізбек шегінің геометриялық мағынасы.**

Жоғарыдағы (1.1.3) теңсіздік келесі қос теңсіздікке эквивалент:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \quad n > N.$$

Осыдан  $x_n$  мүшелері ( $n > N$ )  $a$  нүктесінің  $\varepsilon$ -аймағында жататынын көреміз. Егер  $a$  саны  $\{x_n\}$  тізбегінің шегі болса, онда  $N = N(\varepsilon)$  нөмірі табылады да, нөмірлері  $N$ -нен үлкен барлық  $x_n$  мүшелері  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  интервалында жатады, ал  $x_1, x_2, \dots, x_N$  мүшелері бұл интервалдың сыртында жатады.

$a$  нүктесінің  $\varepsilon$ -аймағын  $U_\varepsilon(a)$  деп белгілейміз. Осы түсінікті пайдалана отырып, тізбек шегінің анықтамасын былай да беруге болады.

**Анықтама 1.1.14.** Егер нүктенің  $U_\varepsilon(a)$  аймағында  $\{x_n\}$  тізбегінің  $N$  нөмірінен бастап барлық элементтері жататын болса, яғни

$$x_n \in U_\varepsilon(a), \quad n > N,$$

онда  $\{x_n\}$  тізбегі санына жинақты деп аталады.

## Мысалдар

1) Жоғарыдағы 1-мысалдағы  $x_n = \frac{1}{n}$  тізбегінің шегі 0-ге тең болатынын көрсетейік. Осы мақсатпен кез келген  $\varepsilon > 0$  санын алып, теңсіздікті қарастырамыз:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon. \quad (2.1.5)$$

Теңсіздікті  $n$  бойынша шешсек,

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Егер  $N$  үшін, мысалы,  $\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$  санын алсақ, онда кез келген  $n > N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$  болғанда (2.1.5) теңсіздіктің орындалатынын көреміз, мұндағы  $\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor - \frac{1}{\varepsilon}$  санының бүтін бөлігі. Демек, берілген тізбектің шегі нөлге тең. Осы сияқты 2-мысалдағы тізбек шегі нөлге тең екенін дәлелдеуге болады.

2) Жоғарыдағы 4-мысалдағы  $x_n = 1$  тізбегінің шегі бірге тең болатынын көрсетейік. Шынында,  $a = 1$  нүктесінің  $U_\varepsilon(1)$  аймағын алып,  $N = 1$  десек, онда барлық  $n > N$  нөмірлері үшін  $x_n = 1 \in U_\varepsilon$  орындалады. Олай болса, 1 саны — берілген тізбектің шегі.

3)  $\sin \frac{\pi n}{2}$  тізбегі жинақсыз. Шынында, тізбектің шегін десек,  $0 < \varepsilon < 1$  шартын қанағаттандыратын  $\varepsilon$  санын алсақ, онда  $U_\varepsilon(a)$  аймағының сыртында берілген тізбектің шексіз көп мүшелері жатады. Демек,  $a$  саны тізбектің шегі бола алмайды.

4)  $x_n = (-1)^n$  тізбегінің шегі жоқ. Шынында, кері жорып, тізбектің шегі  $a$  саны бар дейік. Олай болса, кез келген  $\varepsilon > 0$  саны (мысалы,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ) үшін  $N$  нөмірі табылады да кез келген  $n > N$  үшін

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}.$$

$x_n$  айнымалысы  $n = 2k$  болғанда 1 мәнін, ал  $n = 2k - 1$  болғанда  $-1$  мәнін қабылдайтындықтан

$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{және} \quad |(-1) - a| < \frac{1}{2}.$$

Олай болса,

$$2 = |(1 - a) + (a - (-1))| \leq |1 - a| + |a - (-1)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

яғни  $2 < 1$ . Бұл қайшылық тізбек  $a$  санына жинақты деп жоруымыздың дұрыс еместігін көрсетеді.

## 2 Тізбектің шектерін есептеу келесі қасиеттерді аңғару қиын емес

Егер  $\lim a_n = A$ ,  $\lim b_n = B$  болса, онда:

- $\lim(a_n + b_n) = A + B$ ;
- $\lim(a_n b_n) = AB$ ;
- Егер  $B \neq 0$ ,  $b_n \neq 0$ , онда  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ ;
- Егер  $c$  тұрақты болса,  $\lim(ca_n) = cA$ .

**Есеп 1. (Жинақты тізбек және Коши тізбегі)**

Тізбек  $a_n = \frac{1}{n}$ . Көрсетіңіз: (а)  $a_n$  жинақты; (б)  $a_n$  Коши тізбегі.

**Шешуі.** (а) Кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін таңдаймыз  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ . Егер  $n > N$  болса,

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Сондықтан  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , демек тізбек жинақты.

(б) Коши анықтамасы: кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін табу керек  $N$  сонда  $m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$ . Егер  $m, n > N$  болса (әлдебір  $m > n$  деп алайық),

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \frac{m - n}{mn} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Демек тізбек Коши.

**Есеп 2. (Геометриялық тізбек)**

Тізбек  $c_n = r^n$  берілген. Көрсеттіңіз: егер  $|r| < 1$  болса, онда  $c_n \rightarrow 0$ .

**Шешуі.**  $|r| < 1$  болғандықтан  $|r|^n \rightarrow 0$  экспоненциалдық түрде (әрбір  $\varepsilon > 0$  үшін бар  $N$  сонда  $n > N \Rightarrow |r|^n < \varepsilon$ ). Сондықтан

$$|c_n - 0| = |r|^n \rightarrow 0,$$

яғни  $c_n \rightarrow 0$ .

**Есеп 3. (Рекурренталық тізбек және шегі)**

Рекурренталық түрде анықталған тізбек:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{2}.$$

Табу: тізбектің шегі (бар болса) және дәлелденіз.

**Шешуі.** Егер тізбек жинақты болып, шегі  $L$  болса, онда шек шексіздікке жеткенде рекуррент формуладан

$$L = \frac{L + 3}{2}.$$

Енді теңдеуді шешеміз:

$$2L = L + 3 \Rightarrow L = 3.$$

(Енді шектелімдігі мен монотондығын тексереміз.)  $a_1 = 1$ . Есептейік  $a_2$ :

$$a_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

$a_3 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$ . Жалпы приростты тексереміз:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + 3}{2} - a_n = \frac{3 - a_n}{2}.$$

Егер  $a_n < 3$  болса, онда  $a_{n+1} - a_n > 0$ , яғни өседі. Базалық  $a_1 = 1 < 3$  болғандықтан индукция бойынша барлық мүшелері 3-тен кем және тізбек монотон өседі. Оның үстіне, әр мүшесі 3-тен кем, яғни шектелген. Монотон және шектелген болғандықтан тізбек жинақты, әрі  $\lim a_n = 3$ .

#### Есеп 4. ( $\limsup$ және $\liminf$ )

Тізбек  $d_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ . Табу:  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n$  және  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d_n$ .

**Шешуі.** Мүшелер бөлінеді жұп және тақ индекс бойынша:

$$\text{егер } n = 2k, \quad d_{2k} = (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1,$$

$$\text{егер } n = 2k + 1, \quad d_{2k+1} = (-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \rightarrow -1.$$

Осыдан:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n = \max\left\{\lim_{k \rightarrow \infty} d_{2k}, \lim_{k \rightarrow \infty} d_{2k+1}\right\} = \max\{1, -1\} = 1,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d_n = \min\{1, -1\} = -1.$$

### 3 Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6] жұмыстардан қарауға болады.

#### Список литературы

- [1] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М., 1968, 1972, 1956, 1960, 1964, 1957, 2002.

- [2] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1997, 1990, 1977, 1962, 1998, 1969, 1966, 1958, 1956, 1952, 2002, 2004, 2006, 2005. 3
- [3] Темірғалиев Н. Математикалық анализ. – Алматы, 1991. 3
- [4] Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. – М., 1984, 1981, 1988, 2003. 3
- [5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – М.: Наука, 1982, 1987, 1985, 2004, 2006 3
- [6] Сатығулова С., Исакова А.Қ., Айтжанов С.Е. Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. -236 б. 3